Colles de Maths - semaine 20 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe une constante C et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{C}{k^\alpha}.$$

En considérant les événements $\{\{p \text{ divise } X\}, p \text{ premier}\}$, montrer que

$$\zeta(\alpha) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Exercice 2 Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont donnés par des variables aléatoires i.i.d. admettant une variance σ^2. Déterminer l'espérance de $\det X$ ainsi que sa variance dans le cas où les coefficients sont centrés.

Exercice 3 En utilisant des variables de Poisson, déterminer un équivalent de

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor an \rfloor} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a > 1$;
2. $\displaystyle\sum_{k=\lfloor an \rfloor}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a < 1$.

Exercice 4 Soit une famille $(X_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ une famille de variables de Bernoulli de paramètre p_n mutuellement indépendantes. On considère le graphe aléatoire de sommets $[\![1, n]\!]$, et d'arêtes $\{\{i, j\}, i < j \text{ et } X_{i,j} = 1\}$. Soit X_n le nombre de points isolés dans le graphe.
Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ dans les deux cas suivants :

1. $n\, p_n - \ln n \to +\infty$;
2. $n\, p_n \to a > 0$.

Exercice 5 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $1 \leqslant p < q$. Montrer que *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(iv)* et *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)* $\Rightarrow$ *(v)*, où

- *(i)* Convergence L^q : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^q] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
- *(ii)* Convergence L^p : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
- *(iii)* Convergence presque sûre : $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty) = 1$;
- *(iv)* Convergence en probabilité : $\forall \delta > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X_\infty| > \delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
- *(v)* Convergence en loi : $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to ßnfty]{} \mathbb{E}[f(X_\infty)]$.

On pourra justifier que dans *(iii)*, l'ensemble en argument est bien

Exercice 6 On admet le lemme de Borel-Cantelli. Montrer qu'il n'existe pas de loi de probabilités sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(k\mathbb{N}) = \frac{1}{k}$.

Exercice 7 On reprend les notations de l'exercice précédent. Supposons que (X_n) converge en probabilité vers X_∞. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer qu'il existe une extractrice φ telle que $(X_{\varphi(n)})$ converge presque sûrement vers X_∞.

Exercice 8 On note X_n la variable aléatoire donnée par le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à supports disjoints d'une permutation de $[\![1, n]\!]$ (on compte aussi les points fixes) tirée uniformément au hasard.

1. Montrer que la fonction génératrice G_n de X_n vérifie

$$\forall x \in]0, 1[, \ \frac{G_n'(x)}{G_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}.$$

2. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Montrer que $\frac{X_n}{\ln n}$ converge en probabilité vers 1, c'est-à-dire

$$\forall \delta > 0, \ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\ln n} - 1\right| > \delta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$